

電磁界解析の理解のための電磁気学理論

結石友宏

Electromagnetic Theory for Understanding the Electromagnetic Field Analysis — by Tomohiro Keishi — The electromagnetic field analysis is an indispensable method for designing and developing electric machines. Although the development of electromagnetic field analysis software has simplified the process of analyzing electromagnetic fields, it is still important to understand the electromagnetic theory to construct analytical models and evaluate results. Nevertheless, it is difficult for the beginners to acquire knowledge of this field. In this paper, the author summarizes the basics of electromagnetics and explains how the knowledge of the theory affects electric machine operations.

Keywords: electromagnetics, electromagnetic field analysis, electric field analysis, magnetic field analysis

1. 緒言

数値解析手法の研究開発とパソコンに代表される解析用ハードウェアの高速化・大容量化が進み、有限要素法などの数値解法を用いる電磁界解析を行うことが可能となり、複雑な電磁気現象の解析が可能となっている。現在では電磁界解析は電気機器などの製品設計・開発に無くてはならない道具となっている⁽¹⁾。

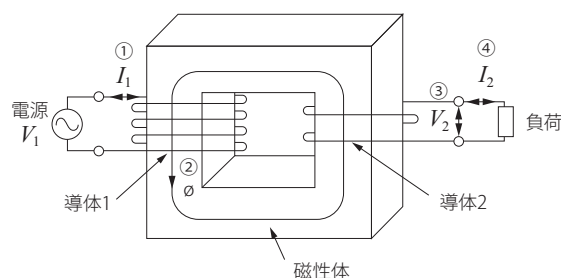
近年の電磁界解析ソフトの機能向上に伴い、形状を入力し条件設定を行うと解析結果が簡単に得られるようになってきている。解析を行う際に、電磁界解析モデルの構築や解析結果の評価を適切に行う必要がある。このとき、電磁気学理論に基づいた電磁気現象の理解が役立つと考えられる。電磁気学の知識を理解して、電磁界解析を実施するのが望ましいが、専門外の人が電磁界解析を行う場合も増えてきていると思われる。電磁気学を専門的に学んでいない人にとって、電磁気学の教科書を最初から読んでいくのは骨の折れる作業と思われる。そこで、電磁気学の知識が電気機器の動作の理解にどのように関係するかについて解説し、電磁気学を学ぶ人に興味を持ってもらえるようにしたい。また、最低限知っておいて欲しい内容についてまとめ、電磁気学を必要とする人の参考としたい。

2. 電気機器の電磁気現象

電気機器は電流^{*1}と磁束^{*2}を使って、機械エネルギーから電気エネルギーを発生させたり（発電機）、電気エネルギーを機械エネルギーに変換したり（電動機）、電気エネルギーを送るときに便利のように電圧を変換したり（変圧器）するための装置である。変圧器型と回転機型に大きく分類される。

図1は変圧器で変圧器型の電気機器の例である。磁性体に導体1が巻かれており、電圧 V_1 の電源が接続されて電流 I_1 が流れている。この電流により磁束 ϕ が発生する。磁束を流すための磁性体があり、この磁性体に導体2が巻かれている。電源電圧 V_1 が交流電圧の場合、電圧が正弦波で時間的に変化するので、磁束も変化する。すると、導体2に起電力^{*3} V_2 が発生する。導体2に負荷が接続されていると電流 I_2 が流れる（詳細は付録1を参照）。

電流を流す目的で導体を使うが、磁束を流す目的で磁性体を使っている。導体の経路を変えるとそれに沿って電流が流れるが、磁性体の経路を変えるとそれに沿って磁束を流すことができる。



- ① 導体1に時間的に変化する電流 I_1 （交流電流）を流す
- ② 変化する磁束 ϕ が発生し、磁性体を通り導体2に変化する磁束が通過する（導体2と磁束が鎖交するという）
- ③ 導体2に起電力 V_2 が発生する
- ④ 導体2に負荷がつながっていると電流 I_2 が流れる

図1 変圧器型電気機器

図2に示す電流センサー⁽¹⁾も変圧器型の機器である。ワイヤハーネス導体が図1の導体1に相当し、導体2は無く、磁性体（磁気コア）の一部が開放されてギャップ部となっている。

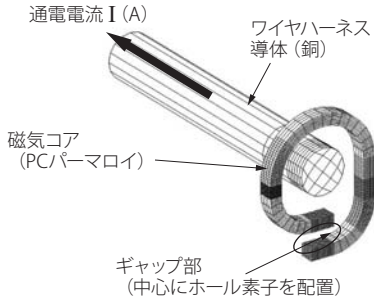
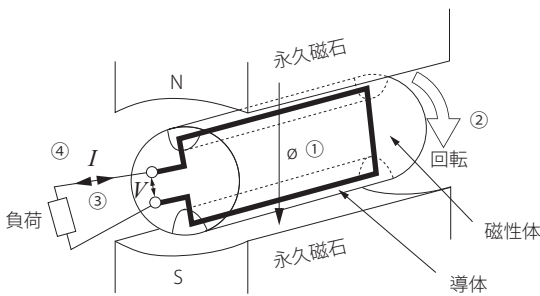


図2 電流センサー

図3は発電機の原理を示すモデルで回転機型の電気機器の例である。上下に配置された永久磁石により磁束 ϕ が発生する。磁性体に導体が巻かれており、磁性体と導体は一体で回転する。すると、導体を通過する磁束が変化するので、導体に起電力 V が発生する。導体に負荷が接続されていると電流 I が流れる（付録2を参照）。



- ① 永久磁石により磁束 ϕ が発生する
- ② 導体が埋め込まれた磁性体が回転する
(実際には多数本の導体があるが1本のみ表示)
- ③ 導体の回転により導体を通過する(導体と鎖交する)磁束が変化するので導体に起電力 V が発生する
- ④ 導体に負荷がつながっていると電流 I が流れる

図3 回転機型電気機器

図4は埋込磁石同期電動機の断面で回転機型の電気機器の例である。外側の磁性体に導体が埋め込まれていて、導体はグループ分けされ三相交流が通電される。内側の磁性体に永久磁石が埋め込まれている。外側の導体の三相通電

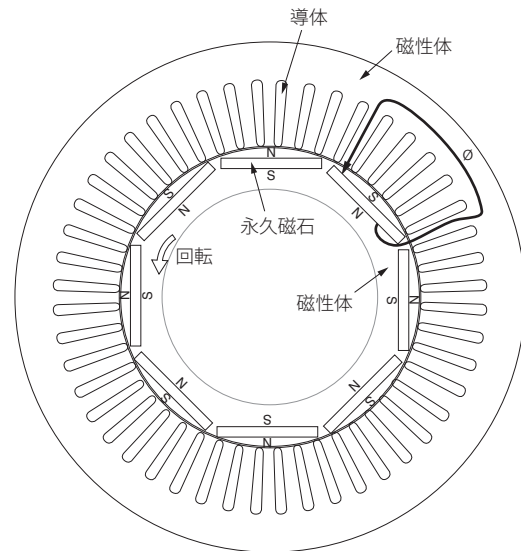


図4 埋込磁石同期電動機

により、内側の磁性体と永久磁石の部分に回転磁束を発生させると、内側の磁性体と永久磁石に回転力（トルク）が発生する（電動機については付録3を参照）。

3. 基本的な電磁気学の理論

3-1 電流^{*1} 図5に示すように導体の両端に直流電圧 V [V]を与えると電流 I [A]が流れる。導体が長さ方向に同じ断面形状で断面積を S [m²]、長さを ℓ [m]、抵抗率を ρ [\Omega m]とするとこの導体の抵抗 R [\Omega]は式(1)で表される。

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \dots\dots\dots (1)$$

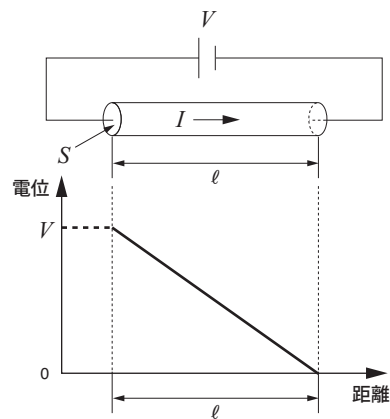


図5 導体に流れる電流による電界

電圧 V 、電流 I 、抵抗 R の間には式 (2) のオームの法則と呼ばれる関係がある。

$$V = IR \quad \dots\dots\dots (2)$$

導体の各部には電界が発生して、電流が流れている。

3-2 電界^{*4} 図5において電池の電圧 V により、導体の左端部の電位は V 、右端部の電位は0となる。導体長 ℓ の間に電圧 V が加わっているので、電界 E [V/m] は式 (3) で求められる。

$$E = \frac{V}{\ell} \quad \dots\dots\dots (3)$$

図6に示すように平行平板電極ではさまれた絶縁体に電圧 V を加えた場合の電界も式 (3) で求められる。

電極に蓄積される電荷 Q [C] は式 (4) で表わされる。

$$Q = CV \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 C [F] は静電容量で式 (5) で表わされる。

$$C = \varepsilon \frac{S}{\ell} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{\ell} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 ε は絶縁体の誘電率 [F/m]、 ε_r は比誘電率、 ε_0 は真空の誘電率 (8.854×10^{-12} F/m) である。

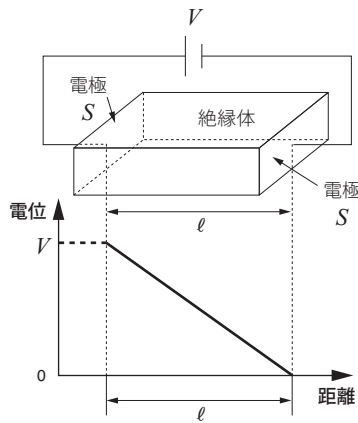


図6 平行平板絶縁体の電界

図7に示すように同心円筒電極ではさまれた絶縁体に電圧 V を加えた場合の電界 E は式(6)で求められる (付録4を参照)。

$$E = \frac{V}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

また、絶縁体の静電容量 C は式 (7) で求められる (付録4を参照)。

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

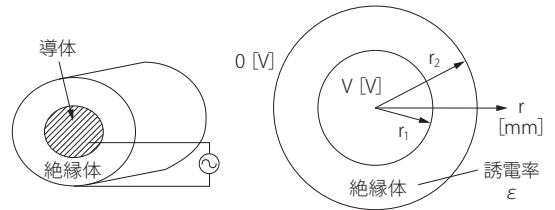


図7 同心円筒絶縁体の電界

3-3 磁界^{*5} 図8に示すように電流 I が流れている導体の周囲には磁界が発生する。右ねじを回転させたとき、ねじの進む方向に電流を流すとねじの回転する向きに磁界が発生する (右ねじの法則)。導体の中心から半径 r の点の磁界 H [A/m] は式 (8) で求められる (付録5を参照)。

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \dots\dots\dots (8)$$

空気中での磁束密度 B [T] は、真空の透磁率を $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] とすると式 (9) となる。

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \dots\dots\dots (9)$$

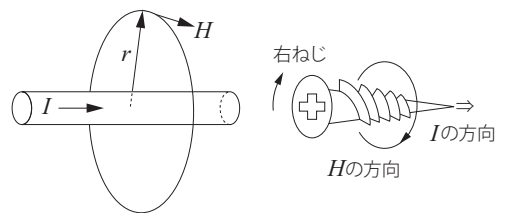


図8 導体に流れる電流による磁界

また、図9に示すように永久磁石の周囲には磁界が発生している。

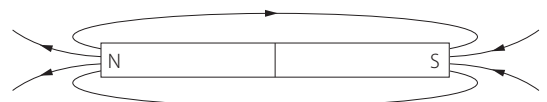


図9 永久磁石による磁界

3-4 電磁誘導 図10に示すように時間的に変化する電流 I が流れ変化する磁界 H が発生している導体の周囲に導体を置くと起電力 V_{OUT} が発生する。さらに、図11に示すように導体が閉ループになっていると電流 I_{OUT} が流れる。

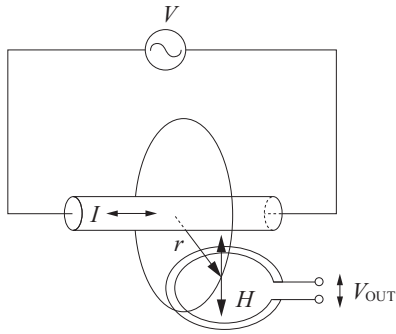


図10 変化する磁界による起電力の発生

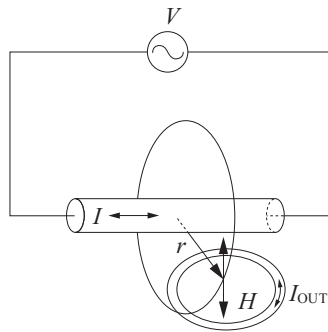


図11 変化する磁界による電流の発生

図12に示すように磁界 H が発生している場所で導体を動かし導体と鎖交する磁束を変化させると起電力 V_{OUT} が発生

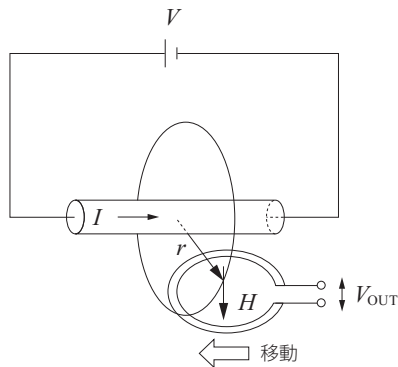


図12 変化する磁界による起電力の発生

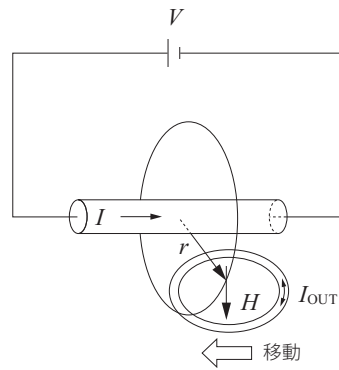


図13 変化する磁界による電流の発生

する。さらに、図13に示すように導体が閉ループになっていると電流 I_{OUT} が流れる。

4. 電磁界解析結果の電磁気学による考察

4-1 電界

(1) 平行平板絶縁体

図14に示す平行平板絶縁体に電圧を加えた場合の有限要素法 (FEM) 電界解析を行うと、電界は 5 [V/mm] となり式 (3) で計算した理論値と一致した。

静電容量はFEM電界解析結果より

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon ES}{V} = \frac{1 \times 8.854 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-3}}{100} = 4.43 \times 10^{-13} \text{ [F]}$$

となり、理論値は式 (5) より

$$C = \epsilon \frac{S}{\ell} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{\ell} = 1 \times 8.854 \times 10^{-12} \times \frac{1 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}} = 4.43 \times 10^{-13} \text{ [F]}$$

となる。FEM電界解析結果は理論値と一致した。

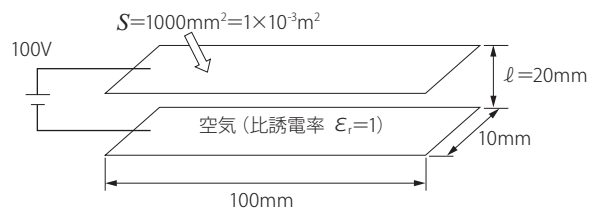


図14 平行平板絶縁体

(2) 同心円筒絶縁体

図15に示す同心円筒絶縁体（CVケーブル絶縁体）に電圧を加えた場合のFEM電界解析を行うと、電界は図16となり式(6)で計算した理論値と一致した。

静電容量はFEM電界解析結果より、内部半導電層表面の要素の電界の値を使って計算すると

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon ES}{V}$$

$$= \frac{2.3 \times 8.854 \times 10^{-12} \times 14.46 \times 10^6 \times 2\pi \times 33.1 \times 10^{-3} \times 1}{288.675 \times 10^3}$$

$$= 2.12 \times 10^{-10} [\text{F/m}]$$

となり、理論値は式(7)より

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$= \frac{2\pi \times 2.3 \times 8.854 \times 10^{-12}}{\ln \frac{60.1}{33.1}} = 2.15 \times 10^{-10} [\text{F/m}]$$

となる。FEM電界解析結果は理論値と一致した（誤差1.4%）。

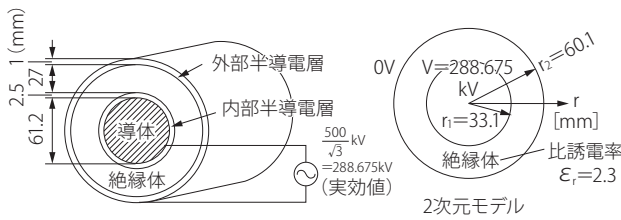


図15 同心円筒絶縁体

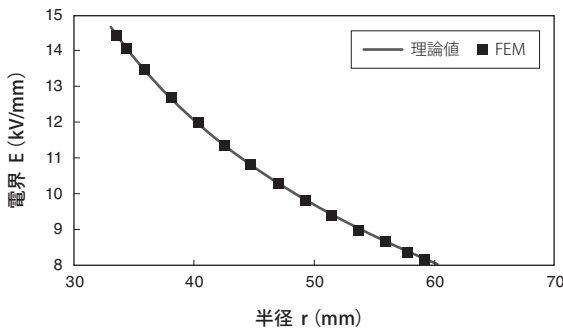


図16 同心円筒絶縁体の電界

4-2 磁界 図17に示す直線状円形導体に電流を流した場合のFEM磁界解析を行うと、磁束密度は図18となり式(9)で計算した理論値と一致した。

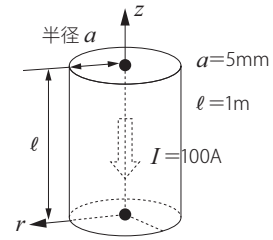


図17 直線状円形導体

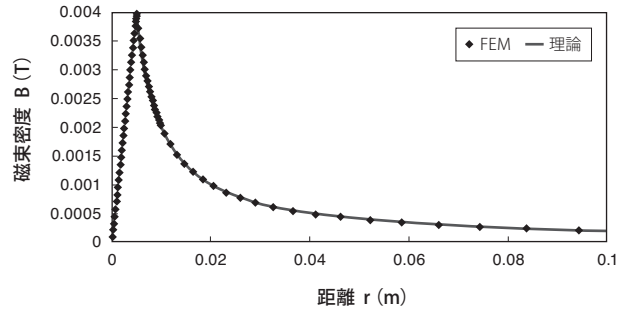


図18 直線状円形導体の電流による磁界

5. 結 言

電気機器は電流と磁束が相互作用しながら目的の機能を達成している。電流は導体の中を流れ、磁束は磁性体の中を流れる。導体を流れる電流が磁束を作り、磁束は磁性体で作られる磁気回路の中を流れる。導体のループの内部を通過する磁束が変化すると、導体には起電力が発生する。起電力は電流を流そうとする力であり、導体が負荷等につながり閉回路を構成すると電流が流れる。また、永久磁石も磁束を作るのに使われる。

このような電磁界の現象を説明するための理論として電磁気学がある。電界、磁界などの物理量はベクトルなので、ベクトル解析を使った式が使われ、Maxwellの方程式として集大成されている⁽¹⁾。この方程式は有限要素法などの数値解法により、解析対象の形状、誘電率・透磁率などの物性値、境界条件、通電電流などの条件を与えると解くことができる。

電界および磁界に関する簡単な問題で、電磁界解析結果と電磁気学の理論値が一致することを確認した。

電気機器の設計を行う際には、この数値解法である電磁界解析が使われる。解析モデルを考えたときや解析結果を評価するときに電磁気学の知識が重要である。

今回の説明が、電磁気学に興味を持ち理解を深めていただくきっかけになれば幸いである。

用語集

※1 電流

電子のような荷電粒子の移動に伴う電荷の流れについて、ある面を単位時間に通過する電荷の量で表わす。単位は[A]で、ある面を1s間に1C通過するとき1Aとなる(1A=1C/s)。

電荷：物体の帯びている電気を電荷と呼ぶ。電荷には正電荷と負電荷がある。単位は[C]で表わされる。

※2 磁束

永久磁石のN極からS極にに向かう磁力線を考えると、磁力線の向きに磁束が通っている。磁界中のある一定断面を通過する磁束密度の法線方向成分×断面積を足し合わせたもの。単位は[Wb]で表わされる。

磁束密度：磁束をそれが通過する面積で割った値。単位は[T]である([Wb/m²]=[T])。

$$\phi = BS$$

ここで、 ϕ は磁束[Wb]、 B は磁束密度[T]、 S は磁束の通過する断面積[m²]である。

※3 起電力

電流を流そうとする力のことで、電流を生じさせる電位の差(電圧)のことである。単位は[V]で表わされる。

※4 電界(電場)

電荷に力を及ぼす空間の性質である。単位は[V/m]で表わされる。

※5 磁界(磁場)

紙の上に砂鉄をまいて永久磁石を置くと、砂鉄は周囲にきれいな線を描く。これは磁界の力によるものである。磁界は永久磁石の他に電流の周囲にも発生する。磁界は磁束密度[T]または磁界の強さ[A/m]で表わされる。

$$B = \mu H$$

ここで、 B は磁束密度[T]、 H は磁界[A/m]、 μ は透磁率[H/m]である。

※6 磁気回路

磁性体などで構成される磁束の通る部分。磁束を電流、起磁力を電圧、磁気抵抗を電気抵抗に対応させることができ、磁気回路におけるオームの法則が成り立つので電気回路の計算と同様に磁気回路の計算を行うことができる。

起磁力：磁気回路に磁束を生じさせる力。コイルに流れる電流と鉄心に巻いてあるコイルの巻数(ターン数)の積となる。

付録

1. 変圧器

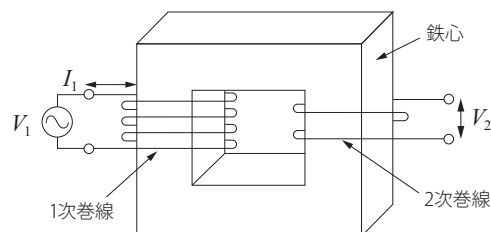
変圧器では、付図1に示すように、1次巻線の導体と2次巻線の導体が鉄心に巻かれていて、鉄心は閉じた磁気回路*6を構成している。

付図2に示すように、1次巻線に交流電流を流すと時間変化する磁束が発生し、鉄心の中を磁束が流れて、2次巻線の部分の鉄心の磁束も時間変化する。

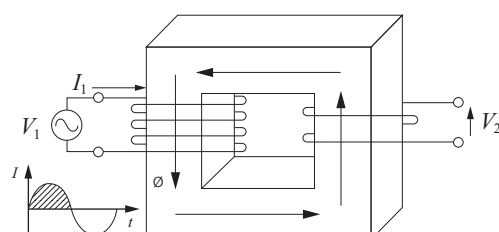
2次巻線の内部の磁束が変化するので導体に起電力が発生する。起電力 V_2 [V]は1次巻線の電圧を V_1 [V]、1次巻線の巻数(ターン数)を N_1 、2次巻線の巻数を N_2 とすると、

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \dots\dots\dots (付1)$$

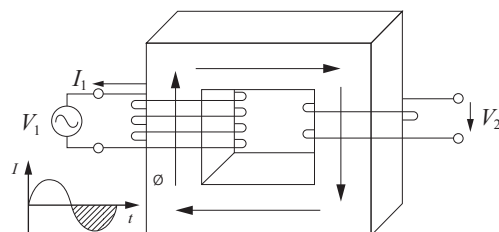
付図3に示すように2次巻線に負荷がつながっているなど閉回路を構成していると電流が流れる。



付図1 変圧器による起電力の発生

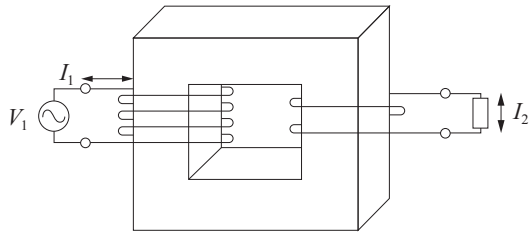


(a) 電流がプラスのとき



(b) 電流がマイナスのとき

付図2 変圧器による磁束の発生



付図3 変圧器による電流の発生

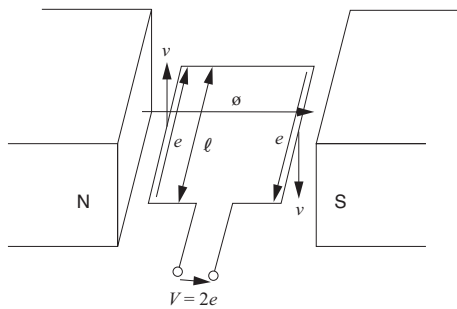
2. 発電機

付図4に示すように、磁束 ϕ [Wb]の中で導体を回転させ速度 v [m/s]で磁束を切ると導体が磁束と直交する長さ ℓ [m]の部分に起電力 e [V]が発生する。磁束と直交している導体にそれぞれ起電力 e が発生し、それぞれ逆方向の起電力なので、導体の端部では起電力 $V=2e$ [V]が発生する。これが発電機の原理である。

$$e = vB\ell \quad \dots\dots\dots (付2)$$

ここで、 B [T]は磁束密度で、磁束の通過している面積を S [m²]とすると式(付3)で表わされる。

$$B = \frac{\phi}{S} \quad \dots\dots\dots (付3)$$



付図4 発電機の原理

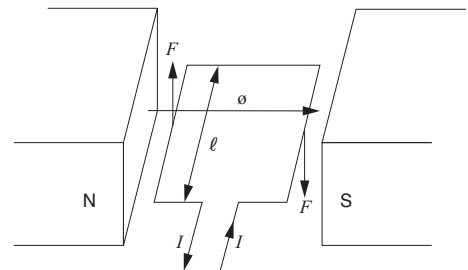
3. 電動機

付図5に示すように、磁束 ϕ [Wb]の中で導体に電流 I [A]を流すと導体が磁束と直交する長さ ℓ [m]の部分に力 F [N]が働く。磁束と直交している導体にそれぞれ力 F が働き、それぞれ逆方向の力なので、導体に対して回転力(トルク)が働く、これが電動機(モータ)の原理である。

$$F = IB\ell \quad \dots\dots\dots (付4)$$

ここで、 B [T]は磁束密度で、磁束の通過している面積を S [m²]とすると式(付3)で表わされる。

なお、実際の電動機では導体が回転しても常に同じ回転方向に力が発生するように、磁束の発生方法や電流の流し方を工夫している。



付図5 電動機の原理

4. 同心円筒絶縁体の電界

付図6に示すように、同心円筒電極ではさまれた絶縁体の電界を求める。

ガウスの法則より

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon} \quad \dots\dots\dots (付5)$$

ここで、 \mathbf{E} は電界[V/m]、 \mathbf{n} は面の単位法線ベクトル、 S は面積[m²]、 Q は電極の電荷[C]、 ϵ は絶縁体の誘電率[F/m]である。積分は電荷を囲む面上の面積分を表わす。

半径 r [m]の位置の電界を E とし、単位長さ1m当たりの電荷を Q とすると、

$$2\pi r \times 1 \times E = \frac{Q}{\epsilon} \quad \text{より}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon r} \quad \dots\dots\dots (付6)$$

印加電圧 V は式(付6)の電界を積分して

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon} [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

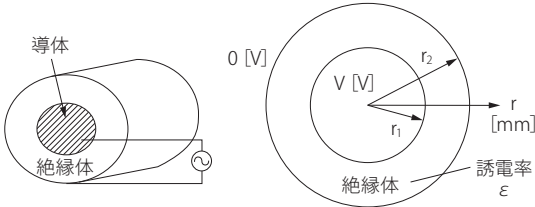
となり、

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon} = \frac{V}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{となる。これを式(付6)に代入して}$$

$$E = \frac{V}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \dots\dots\dots (付7)$$

また、静電容量 $C[F]$ は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \dots\dots\dots (付8)$$



付図6 同心円筒絶縁体の電界

参 考 文 献

- (1) 結石友宏、「電磁界解析と製品開発への応用」、SEIテクニカルレビュー第175号、pp.1-9 (2009)
- (2) 為近和彦、理系なら知っておきたい物理の基本ノート [電磁気学編]、中経出版 (2007)
- (3) 山田直平、電磁気学、電気学会 (1971)

執 筆 者

結石 友宏 : シニアスペシャリスト
 解析技術研究センター 主幹
 博士 (工学) 技術士 (電気電子部門)
 CAE (Computer Aided Engineering)
 の研究に従事



5. 直線電流の周囲の磁界

付図7に示すように、電流の流れている導体の周囲の磁界を求める。

アンペアの周回積分の法則より

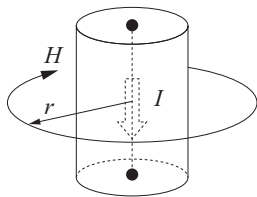
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I \quad \dots\dots\dots (付9)$$

ここで、 \mathbf{H} は磁界 [A/m]、 \mathbf{s} は線ベクトル、 I は導体の電流 [A]である。積分は電流を囲む閉曲線上の線積分を表わす。式 (付9) より $2\pi rH = I$ となり、

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \dots\dots\dots (付10)$$

真空の透磁率を μ_0 とすると磁束密度 $B [T]$ は、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \dots\dots\dots (付11)$$



付図7 直線状円形導体の周囲の磁界